MA2 – písemná "přednáška" 18.3.2020 (část první)

V další "kapitole" Matematiky A2 se vrátíme ke studiu (a "vyšetřování") funkcí "obecnějších" než těch, které jsme "probírali" v MA1, tj. fcí reálných reálné proměnné, tj. $f: M \subset R \to R$ (R – množina reálných čísel)

Obecně to budou funkce $f: M \subset R^n \to R^m$, $n, m \in N$

(R^m, R^n – nám známé lineární prostory z lineární algebry) a seznámíme se aspoň se základy diferenciálního a integrálního počtu těchto funkcí a užití diferenciálního i integrálního počtu.

Základem diferenciální (a i integrálního) počtu funkcí jedné proměnné byl pojem limity funkce – a k tomu jsme potřebovali vzdálenost bodů v R (zde $d(a,b) = |b-a| = |a-b|$, $a, b \in R$). Chceme-li tedy "budovat" analogii diferenciálního počtu fce jedné proměnné i pro fce obecnější, je třeba ještě lineární prostor R^n "opatřit" vzdáleností a pak asi "budeme už umět uvažovat o limitách, derivacích a jejich užití, a i definovat (pomocí limit) spojitost funkce více proměnných a další užitečné pojmy.

Dříve, než rozšíříme náš pohled na prostory R^n, ukažme si příklady funkcí $f: M \subset R^n \to R^m$

(a rada pro méně odvážné čtenáře – představujte si i v obecných tvrzeních (dále) třeba $n=2$, $n=3$; pak je lépe "vidět", co se říká)

Příklady funkcí $f: M \subset R^n \to R^m$:

(jednoduché příklady; pro $n=1,2,3$ a i $m=1,2,3$)

I) $f: M \subset R \to R^n$

(často se tyto funkce označují $\vec{f}(x)$ a nazývají vektorové funkce jedné proměnné)

$x \in M \subset R$, pak $y=\vec{f}(x) \in R^n$, $y \in R^n$, tedy

$y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, a každá složka y_i je závislá reálnou funkcí proměnné x, tj. budeme psát $y_i = f_i(x)$, tj.

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in M$$

$(f_i: M \subset R \to R, \ i=1,2..n)$

($f_i(x)$ se nazývají složkami fce $\vec{f}$, nebo také souřadnicové funkce fce $\vec{f}$)

Příklady (známe asi z analytické geometrie v rovině nebo prostoru)

1) Je dán bod $A[a_1, a_2, a_3]$, vektor $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$, pak

$$(*) \quad \vec{f_1}(t) = (a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3), \ t \in R$$

je parametrické vyjádření přímky p, $A \in p$ a $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p;

je-li $t \geq 0$, pak je vyjádřena tato polopřímka s počátečním bodem A, a směrovým vektorem $\vec{u}$;

je-li $t \in \langle 0, t_0 \rangle$, pak vektorovou funkcí $(*)$ je „vyjádřena" úsečka s počátečním bodem $A[a_1, a_2, a_3]$ a „koncovým bodem $[a_1 + t_0u_1, a_2 + t_0u_2, a_3 + t_0u_3]$.

2) $\vec{f_2}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$, $R > 0$

$\vec{f_2}(t)$ je t.zv. parametrické vyjádření kružnice o středu v $[0,0]$ a poloměru R – 2x „obíhnuté"
(neboť $R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$)

3) $\vec{f_3}(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a>0, b>0$

– parametrizace elipsy o středu v $[0,0]$ a poloosách $\underline{a, b}$;
(je-li $x = a\cos t, y = b\sin t$, pak $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

4) $\vec{f_4}(t) = (R\cos t, R\sin t, at)$, $t \in \langle 0, 6\pi \rangle$, $R>0, a>0$

– parametrizace „spirály" – průmět do roviny $z=0$ je kružnice v příkladu 2) a souřadnice $z=at$ bodu na spirále „roste" rychlostí $\underline{a}$ (>0)

5) „fyzikální pohled" na vektorovou funkci jedné „proměnné" – popis „trajektorie" při pohybu bodu

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$

(t – „čas")

II: $f: M \subset R^n \to R$ (reálné funkce n proměnných (zde), často – reálné funkce více proměnných)

(zde platí rada – uveďme příklady funkcí dvou a tří proměnných „na začátek")

značení: $X = (x_1, \dots x_n)$, $y = f(x_1, \dots x_n)$ (také $y = f(X)$)

Příklady

1) $f(x,y) = x^2+y^2$; $D_f = R^2$ (D_f - definiční obor f)

(pro $n=2$ se píše zpravidla místo $(x_1,x_2) \to (x,y)$
pro $n=3$ místo (x_1,x_2,x_3) většinou „píšeme" (x,y,z))

A co „bude" graf fce f ? - označme G_f) :

zde: $G(f) = \{[x,y,z] ; (x,y) \in R, z = x^2+y^2\}$

(obecně pro funkci $f: M \subset R^n \to R$ grafem se nazývá množina $G(f) = \{[x_1,..,x_n,y]; (x_1,..,x_n) \in D_f, y = f(x_1,..,x_n)\}$,
$G(f) \subset R^{n+1}$)

Grafem funkce v našem příkladu je plocha (asi si dovedeme plochu představit, i když ji nemáme přesně definovanou") - a zkusme tak, jako na mapě si, když si „kopec" dokážeme představit pomocí vrstevnic :

Zkoumejme množiny bodů v D_f, kde z = konstanta ;

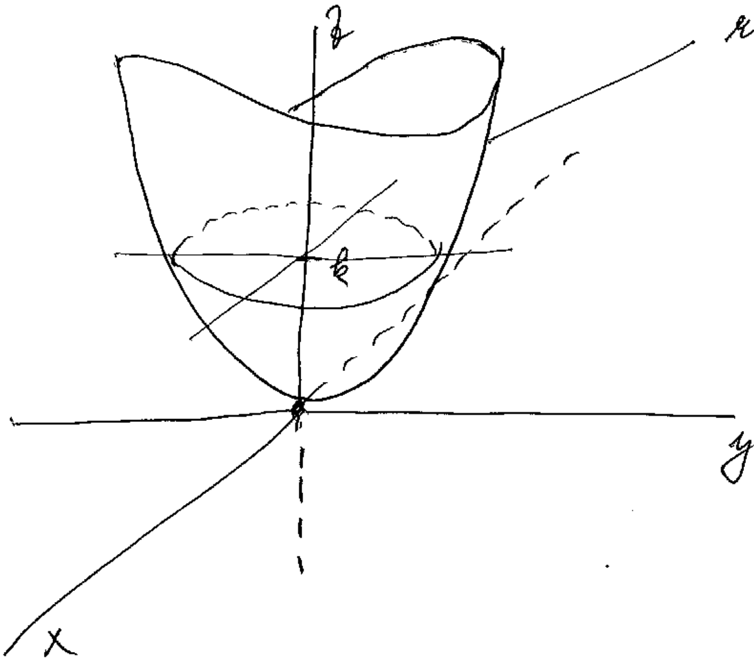
tj. $x^2+y^2 = k$ - má řešení pro $k \geq 0$ (na „mapě" - tj. v rovině $z=0$)

$k=0 \to [x,y] = [0,0]$;

$k>0$ - dostaneme $\{[x,y]; x^2+y^2 = k\}$ - což je kružnice o středu v počátku a poloměru $\sqrt{k}$ - to je ta „vrstevnice" ve výšce $\underline{k}$; tedy „řez" naší plochy rovinou $z=k$ je kružnice o středu na ose z $[0,0,k]$ a poloměru $\sqrt{k}$ - taková plocha vznikla rotací „nějaké" křivky kolem osy z (- jaké ?) a nazývá se rotační plocha

Zkusme najít „křivku“, kterou rotuji v našem příkladu (kolem osy z) – udělejme „řez“ rovinou $x = 0$ –
– dostaneme : $z = y^2$ – což je známá křivka (parabola)

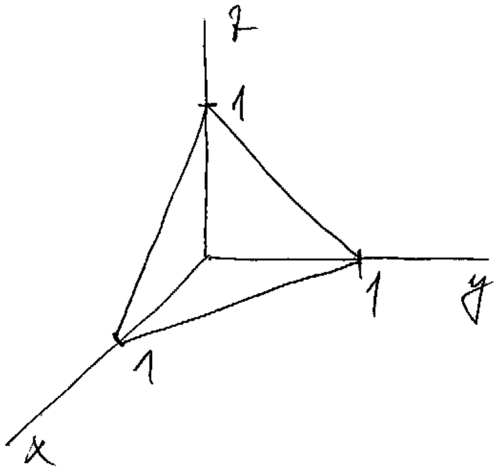
A plocha, která vznikla rotací paraboly (zde) $z = y^2$ se nazývá „rotační paraboloid“ –
a (neumělý) náčrtek grafu fce $f(x,y) = x^2 + y^2$



rovnice této plochy:
$z = x^2 + y^2, \ (x,y) \in R^2$

A další (jednoduché) příklady

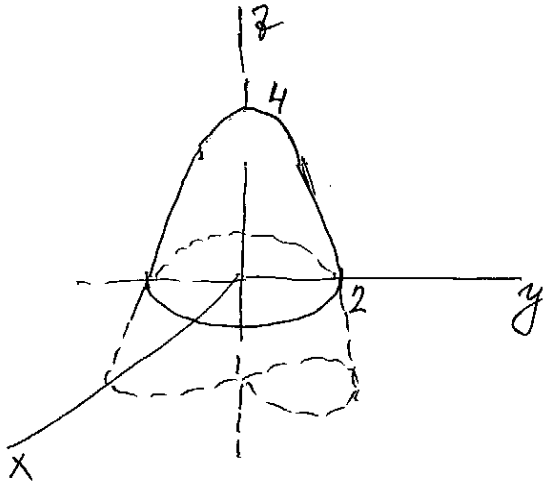
2.) $f(x,y) = 1 - x - y$, $(x,y) \in R^2$ opět, a graf –
– množina bodů $[x,y,z]$, kde $z = 1 - x - y$ – rovina



← co je z grafu „vidět“ při pohledu ze směru kladné poloosy x

(omlouvám se, tento příklad měl být příkladem prvním)

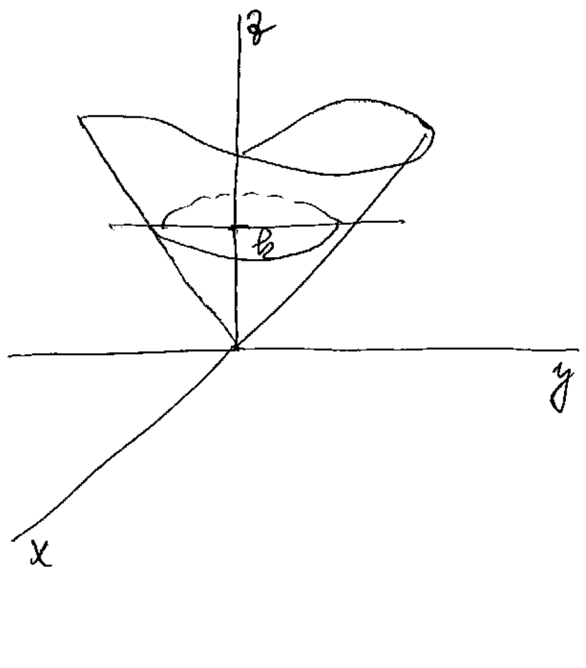
3.) $f(x,y) = 4-(x^2+y^2)$: – $D_f = R^2$, a graf –
– „asi" obrácený (dolů) rotační paraboloid s vrcholem v bodě $[0,0,4]$



(vrstevnice v rovině $z=0$
$x^2+y^2=4$)

4.) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$: $D_f = R^2$, a graf ? (pokus)

„vrstevnice" („ekviskalární křivky" dle matematiků) jsou opět kružnice o rovnici
pro $z=k$: $\sqrt{x^2+y^2} = k$,
tj. $x^2+y^2 = k^2$



a „řez" rovinou $x=0$:
„$z=\sqrt{y^2}$", tj. $z=|y|$ –
– tj. tento „graf" rotuje kolem osy z – vytváří t.zv. kuželovou plochu

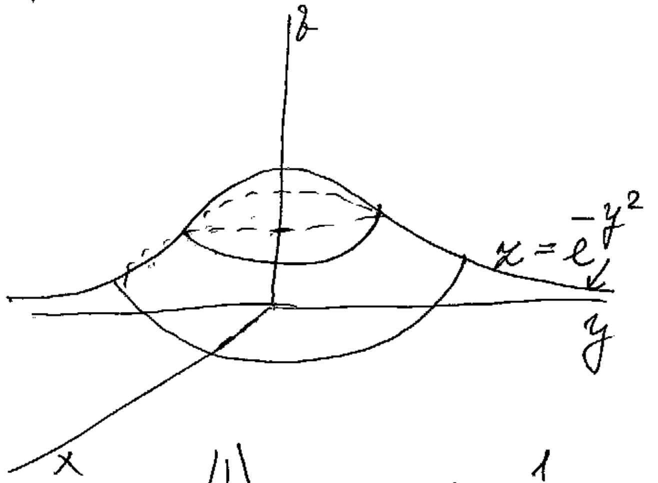
A zkuste „sami" si představit i graf fce

$f(x,y)=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$; zde $D_f = \{[x,y];\ 4-(x^2+y^2)\geq 0\}$
$= \{[x,y];\ x^2+y^2 \leq 4\}$ –
– tj. def. obor je kruh o středu v $[0,0]$ a poloměru $r=2$

5) a příklady dalších „hezkých" funkcí dvou proměnných, jejichž graf je rotační plocha:

a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$:

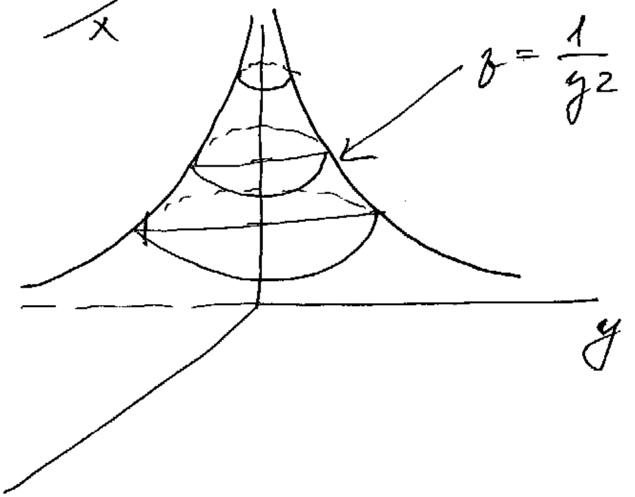
$D_f = R^2$ – graf vznikne rotací známé „pohodové deky" křivky – grafu fce $z = e^{-y^2}$



b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$:

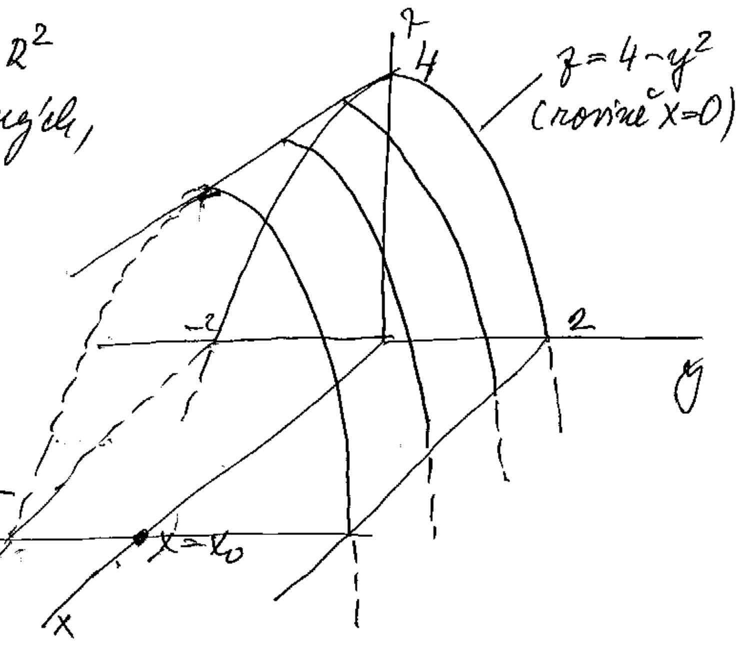
$D_f = \{[x,y];\ x^2+y^2 \neq 0\}$
$= R^2 \setminus \{[0,0]\}$

a graf vznikne rotací křivky – grafu fce $z = \dfrac{1}{y^2}$ (nám známá fce)



6) $f(x,y) = 4 - y^2$ – $D_f = R^2$

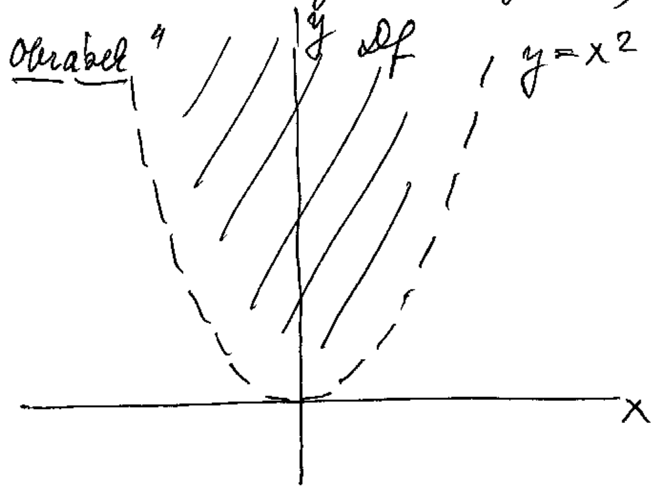
i toto je funkce dvou proměnných, je konstantní vzhledem k proměnné x – tj. „řezy rovinami $x = x_0$ jsou stále stejné" – a mají rovnici „$z = 4 - y^2$ – neboli paraboly – takové plochy se nazývají „válcové" plochy



(omluva za „neurčité" náčrtky „jen rukou")

a ještě několik příkladů funkcí více proměnných (bez grafů)

7) $f(x,y) = \ln(y - x^2)$: „Obrázek"



$Df = \{[x,y];\ y - x^2 > 0\} =$

$= \{[x,y];\ y > x^2\}$

(„vnitřek" paraboly – „bez" hranice $y = x^2$)

a dále třeba $f_1(x,y) = y^2 - x^2$, $f_2(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $f_3(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

nebo $f_4(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$, $f_5(x,y) = \sqrt{x-y}$:

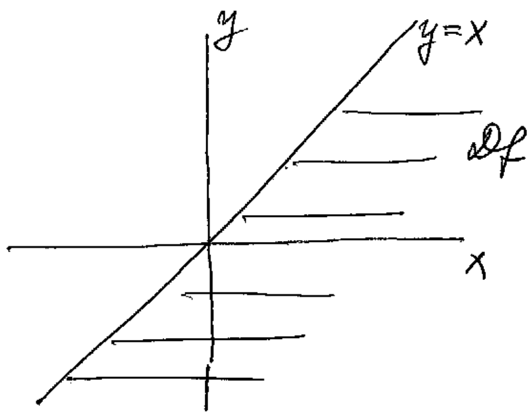
kde: $Df_1 = R^2$; $Df_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y \neq 0\}$; $Df_3 = R^2 \setminus \{[0,0]\}$;

$Df_4 = R^3 \setminus \{[0,0,0]\}$;

$Df_5 = \{[x,y] \in R^2;\ x - y \geq \}$

$= [\{x,y] \in R^2;\ x \geq y\}$

(polorovina (na obrázku) včetně přímky $y = x$)



a příklady užití funkcí více proměnných ve fyzice (i v chemii)

a) je-li množina $\Omega \subset R^3$ chápána jako „těleso",
pak hustota $\rho = \rho(x,y,z)$ je funkcí bodu $(x,y,z) \in \Omega$

b) další funkce: $c = c(t,x,y,z)$ – koncentrace látky v čase t
a v bodě $(x,y,z) \in \Omega \subset R^3$

$\varrho = \varrho(t, x, y, z)$ – hustota kapaliny v bodě (x, y, z) a čase t
(při proudění kapaliny)

$T = T(t, x, y, z)$ – teplota v bodě $(x, y, z) \in \Omega \subset R^3$
v čase t

$F(p, V, T) = 0$ stavová rovnice v termodynamice,
zde $p = p(V, T)$, $V = V(p, T)$, $T = T(p, V)$
(V - objem, p - tlak, T - absolutní teplota)

spec: $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT = 0$, a, b, R - konstanty (kladné)
(Van der Waalsova stavová rovnice)

III. $\vec{f} : M \subset R^n \to R^m$ – vektorové funkce více proměnných
speciálně pro $m = n$ a $n = 2, 3$ – „vektorová pole"

Příklady:

1) proudění kapaliny je popisováno polem rychlosti proudící kapaliny: $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$
(Eulerův popis „proudění")

2) Silové pole – obecně $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z)$ –
– síla $\vec{F}$ může záviset na poloze i čase)

např.: Newtonův gravitační zákon :

$A\,[a_1, a_2, a_3]$; $X = [x_1, x_2, x_3]$, m_A, resp. m_X – hmotnost A, resp. X ($A \neq X$)

pak $$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = -\varkappa \frac{m_X \cdot m_A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - a_i)^2}}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3)$$

(síla, kterou „působí" hmotný bod A na hmotný bod X)

nebo – intensita elektrostatického pole bodového náboje $Q(+)$ umístěného v počátku v bodě $X = (x, y, z)$ $\{\neq (0,0,0)\}$

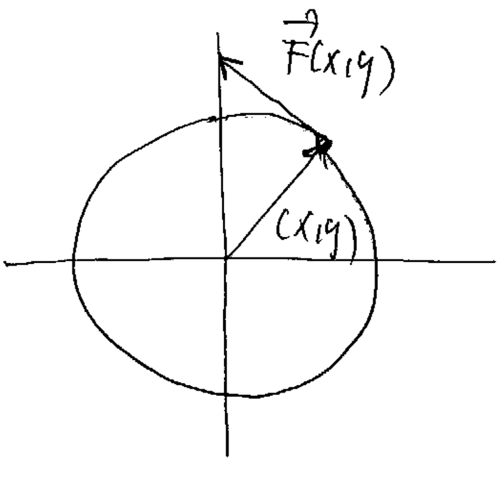
$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$$

3) $$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

vektorové pole má na kružnici $x^2+y^2=r^2$, $r>0$ stále stejnou velikost $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{r^2}$)

a $(x, y) \cdot \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$, tj. vektor $\vec{F}(x,y)$

je kolmý k vektoru (x,y) (v bodě kružnice)



– popisuje „víry" – blíže bude, až budeme probírat „křivkové integrály vektorových polí"

4) a ještě připomenutí lineárních zobrazení $L : R^n \to R^m$;
(viz lineární algebra):
Je-li $L : R^n \to R^m$ lineární zobrazení, pak existuje (jediná, ve „zvolených bázích") matice A typu (m,n) tak, že $y = L(x) = A \cdot x$, tedy $(y \in R^m,\ X = R^n)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ --- \qquad --- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

tedy $y = L(x)$ je také vektorová funkce n proměnných
(a ta „nejjednodušší" – lineární)

<u>V druhé části přednášky bude</u>

1) zavedení vzdálenosti v R^n
2) vyšetření vektorových funkcí jedné proměnné, tj. $\vec{f} : M \subset R \to R^n$ (v příkladech I.)